2 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений:

$$A\vec{x} = \vec{f}\ , \tag{4}$$

где A– вещественная квадратная матрица порядка $m \times m$,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix}$ – искомый вектор, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ : \\ f_m \end{pmatrix}$ – заданный вектор.

Предполагается, что $\det A \neq 0$ => решение (4) существует и единственно.

Из курса алгебры известно, что систему (4) можно решить по крайней мере двумя способами: либо по формулам Крамера, либо методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). При больших m метод Крамера требует порядка m! арифметических действий, а метод Гаусса $O(m^3)$ действий.

Методы решения системы (4) делятся на прямые и итерационные.

В прямых (точных) методах решение $\vec{x}$ системы (4) находится за конечное число арифметических действий.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение $\vec{x}$ системы (4) находится как предел при $n \to \infty$ последовательных приближений $\vec{x}^{\,n}$, где n номер итерации. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка

$$\| \vec{x}^{\,n} - \vec{x} \| < \varepsilon, \tag{5}$$

где ε – некоторое малое число.

2.1 Метод Гаусса

2.1.1 Основная идея метода

Запишем (4) в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = fm \end{cases} \quad (6)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$. Поделив первое уравнение на a_{11}, получим

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1m}x_m = y_1, \quad (7)$$

где $c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}$, $j = 2,\ldots,m; y_1 = \frac{f_1}{a_{11}}$, оставшиеся уравнения выглядят так:

$$a_{i1}x_1 + a_{i_2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = fi; i = 2,3,..,m \quad (8)$$

умножим (7) на a_{i1} и вычтем из i –того уравнения системы (8), $i = 2,3,..,m$

.

В результате получим:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1j}x_j + \ldots + c_{1m}x_m = y_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2j}^{(1)}x_j + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m = f_2^{(1)} \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mj}^{(1)}x_j + \ldots + a_{mm}^{(1)}x_m = f_m^{(1)} \end{cases} \quad (9)$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - c_{1j}a_{i1}$, $f_i^{(1)} = f_i - y_1a_{i1}; i, j = 2,3,..,m$, матрица системы (9) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 c_{12} \ldots c_{1m} \\ 0\, a_{22}^{(1)} \ldots a_{2m}^{(1)} \\ 0\, a_{m2}^{(1)} \ldots a_{mm}^{(1)} \end{bmatrix}$$

В системе (9) неизвестное x_1содержится только в первом уравнении, поэтому в дальнейшем достаточно иметь дело с укороченной системой уравнений

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2j}^{(1)} x_j + \ldots + a_{2m}^{(1)} x_m = f_2^{(1)} \\ \\ a_{m2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{mj}^{(1)} x_j + \ldots + a_{mm}^{(1)} x_m = f_m^{(1)} \end{cases} \qquad (10)$$

Это был первый шаг метода Гаусса. Если теперь $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из системы (9) аналогично можно исключить неизвестное x_2 и прийти к системе, эквивалентной (6) и имеющей матрицу следующей структуры:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & \ldots & x \\ 0 & 1 & x & \ldots & x \\ 0 & 0 & x & \ldots & x \\ 0 & 0 & x & \ldots & x \end{bmatrix}$$

При этом первое уравнение системы (9) остается без изменений. Исключая таким же образом неизвестные $x_3, x_4, \ldots, x_m$, придем окончательно к системе уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1m} x_m = y_1 \\ x_2 + \ldots + c_{2m} x_m = y_2 \\ \ldots \\ x_{m-1} + c_{m-1,m} x_m = y_{m-1} \\ x_m = y_m \end{cases} \qquad (11)$$

Матрица этой системы содержит нули всюду ниже главной диагонали (верхняя треугольная матрица).

Получение системы (11) называют прямым ходом метода Гаусса. Обратный ход заключается в нахождении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ из системы (9).

$x_m = y_m$, $x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} * x_m$ и т. д.

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{m} c_{ij} x_i \ , \ i = m-1,\ldots,1; \ x_m = y_m$$

2.1.2 Расчетные формулы

Прямой ход:

1) коэффициенты:

$a_{kj}^{(0)} = a_{kj}$, k, j=1,2,..,m

$c_{kj} = \frac{a^{(k-1)}{}_{kj}}{a_{kk}^{k-1}}$; j=k+1,k+2,…,m.

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}$;

i, j=k+1, k+2,…, m, k=1,2,…,m-1;

2) Правые части: $f_K^{(0)} = f_k, y_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, k = 1,2,..,m$

$f_i^k = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k, i = k+1, k+2,...,m$

Коэффициенты c_{ij} и правые части $y_i, i = 1,2,...,m; j = i+1, i+2,....,m$ хранятся в памяти ЭВМ и используются при осуществлении обратного хода.

Обратный ход: $x_m = y_m$

$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{m} c_{ij} x_j, i = m-1,...,1$

Основным ограничением метода является предположение о том, что все элементы $a_{кк}^{(к-1)}$, на которые проводится деление, отличны от нуля. Число $a_{кк}^{(к-1)}$ называется ведущим элементомна $к$-том шаге исключения. Даже если какой-то ведущий элемент не равен нулю, а просто близок к нулю, в процессе вычислении может произойти сильное накопление погрешностей. Частично эта проблема решается в методе Гаусса с выбором главного элемента.

Для больших m число действий умножения и деления в методе Гаусса близко к $\frac{m^3}{3}$.

2.2 Метод Гаусса с выбором главного элемента

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается главный, то есть наибольший по модулю элемент. Тем самым, если $\det A \neq 0$, то в процессе вычислении не будет происходить деления на ноль.

Применяют метод Гаусса с выбором главного элемента по строке. Он эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация переменных.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация уравнений.

Иногда применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент среди всех элементов матрицы системы.

2.3 Обращение матрицы

Нахождение матрицы, обратной матрице А, эквивалентно решению матричного уравнения:

$$\mathrm{A}X = \mathrm{E} \tag{12}$$

где E -единичная матрица и X искомая квадратная матрица. Уравнение (12) можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \quad i, j = 1,2,\ldots,m \tag{13}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j, \delta_{ij} = 0$,при $i \neq j$.

Заметим, что система (13) распадается на m независимых систем уравнении с одной и той же матрицей А, но с различными правыми частями.

Эти системы имеют вид:

$$A\vec{x}^{(j)} = \delta^{(j)},\ j = 1,2,\ldots,m \tag{14}$$

где $\vec{x}^{\,j} = \begin{matrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{mj} \end{matrix}$, а у вектора $\vec{\delta}^{(j)}$ равна единице j-тая компонента и равны нулю остальные компоненты.

Для решения системы (14) используется метод Гаусса (обычный или с выбором главного элемента). Поскольку , все системы (14) имеют одну и ту же матрицу А, достаточно один раз совершить прямой ход метода Гаусса. Обратный ход будет для каждого $\vec{\delta}^{(j)}$ свой.